Sonder-Abdruck aus dem LIII. Bde. der Sitzungsb. der kais. Akad. der Wissenschaften.

Über den Einfluß der inneren Reibung in der Luft auf die Schallbewegung.

Von J. Stefan,

wirklichem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 19. April 1866.)

Die Differentialgleichung, deren Integration zu den Gesetzen der Schallbewegung in der Luft führt, wird aus den allgemeinen Gleichungen für die Bewegung flüßiger Körper gewonnen. Man setzt dabei voraus, daß die Geschwindigkeiten der einzelnen Lufttheilchen, ihre Änderungen von Theilchen zu Theilchen, so wie die dadurch entstehenden Verdichtungen und Verdünnungen sehr klein sind und vernachlässigt die Glieder, welche bezüglich dieser Größen von der zweiten Ordnung sind. Unter diesen Voraussetzungen soll auch im Folgenden die Differentialgleichung der Schallbewegung abgeleitet werden, jedoch nicht aus den gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen, sondern aus jenen, bei deren Aufstellung auf die innere Reibung in der Flüssigkeit Rücksicht genommen ist. Wirken auf die Flüssigkeit keine äußeren Kräfte, so können diese Gleichungen in folgender Weise geschrieben werden: [1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \frac{d.u}{dt} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho \frac{d.v}{dt} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho \frac{d.w}{dt} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w. \end{aligned} \qquad (1)$$

Darin bedeuten p, ρ Druck und Dichte, u, v, w die nach den Richtungen der Coordinaten geschätzten Componenten der Geschwindigkeit im Punkte x, y, z zur Zeit t. λ und μ sind von der inneren Reibung abhängige Constante. Ferner ist abkürzend

[1]) Sitzungsberichte Bd. XLVI, pag. 8.

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

gesetzt und $\frac{d.}{dt}$, Δ sind Operationszeichen, bestimmt durch die symbolischen Gleichungen

$$\frac{d.}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Zu den Gleichungen (3) kommt nun noch eine, die sogenannte Continuitätsgleichung hinzu, welcher nach den eingeführten Bezeichnungen die Form

$$\frac{d.\rho}{dt} + \rho\theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

gegeben werden kann.

Sind nun u, v, w so wie ihre Differentialquotienten, eben so die Differentialquotienten von ρ sehr klein und vernachlässigt man die Glieder zweiter Ordnung, so hat dies den Effect, daß man in den Gleichungen (1) und (2) das Operationszeichen $\frac{d.}{dt}$ durch $\frac{\partial}{\partial t}$ ersetzen kann.

Bedeutet ρ_0 die Dichte der Luft im Zustande der Ruhe, σ die durch die Bewegung entstehende Verdichtung, so kann man

$$\rho = \rho_0(1+\sigma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

setzen, worin ρ_0 constant, σ Function von x, y, z, t und zwar eine kleine Größe erster Ordnung ist. Da in den Gleichungen (1) ρ als Factor bei ebenfalls kleinen Größen erster Ordnung, nämlich den Differentialquotienten von u, v, w nach t als Factor steht, so kann man es daselbst durch ρ_0 ersetzen.

Differenzirt man nun die erste der Gleichungen (1) nach x, die zweite nach y, die dritte nach z und addirt die Resultate, so erhält man, wie leicht zu übersehen ist

$$\Delta p = -\rho_0\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\lambda+2\mu)\Delta\theta \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Die Gleichung (2) gestattet θ durch ρ auszudrücken. Ersetzt man $\rho\theta$ durch $\rho_0\theta$, so geht diese Gleichung über in

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{dt} + \rho_0 \theta = 0,$$

woraus man

$$\theta = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

erhält.

Ist p_0 der Druck der Luft im Zustande der Ruhe, so hat man in dem Falle der Schallbewegung, bei welcher die Luft ihre Dichte ändert, ohne Wärme dabei abzugeben oder zu empfangen, zwischen p, p_0, ρ, ρ_0 die Relation

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{c}{c_1}},$$

wenn c die Wärmecapacität der Luft bei constantem Druck, c_1 die Wärmecapacität bei constantem Volumen ist. Führt man in diese Gleichung den Werth von ρ aus (3) ein und ersetzt die Potenz von $1+\sigma$ durch die zwei ersten Glieder ihrer nach dem binomischen Satze gemachten Entwicklung, so folgt

$$p = p_0\left(1 + \frac{c}{c_1}\sigma\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Mit Hilfe dieses Werthes von p und des Werthes von θ aus (5) verwandelt sich nunmehr die Gleichung (4) in

$$p_0 \frac{c}{c_1} \Delta\sigma = \rho_0 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\, \Delta \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

oder wenn man

$$\frac{p_0 c}{\rho_0 c_1} = k, \quad \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} = h$$

setzt, in

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = k\Delta\sigma + h\Delta \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Handelt es sich um ebene Schallwellen, so kann man ihre Fortpflanzungsrichtung zur Axe der x wählen und σ von y und z als unabhängig betrachten. Dann geht vorstehende Gleichung über in

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + h \frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^2 \partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Ein particuläres Integral dieser Gleichung kann in der Form

$$\sigma = X \sin \gamma t + Y \cos \gamma t \tag{9}$$

aufgestellt werden, worin X, Y nur Functionen von x sind, γ eine arbiträre Constante bedeutet. Führt man diesen Werth von σ in die Gleichung (8) ein, so folgt

$$-\gamma^2 X \sin \gamma t - \gamma^2 Y \cos \gamma t =$$
$$k \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \sin \gamma t + k \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \cos \gamma t + h\gamma \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cos \gamma t - h\gamma \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \sin \gamma t.$$

Aus dieser Gleichung, die für jeden Werth von t erfüllt sein muß, folgen die beiden

$$\left.\begin{aligned} -\gamma^2 X &= k \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - h\gamma \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\ -\gamma^2 Y &= k \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + h\gamma \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Führt man in diese zwei Gleichungen als particuläre Auflösungen die Werthe

$$X = Ae^{\alpha x}, \quad Y = Be^{\alpha x} \tag{11}$$

ein, worin A und B Constante sind, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} -\gamma^2 A &= k\alpha^2 A - h\gamma\alpha^2 B \\ -\gamma^2 B &= k\alpha^2 B + h\gamma\alpha^2 A. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Sollen diese zwei Gleichungen gleichzeitig gelten, so muß offenbar zwischen A und B die Relation

$$\frac{A}{B} = -\frac{B}{A} \quad \text{oder} \quad A^2 = -B^2$$

bestehen. Daraus ergibt sich also

$$B = +Ai \quad \text{oder} \quad B = -Ai.$$

Nimmt man den ersten dieser beiden Werthe für B, so geben dann die Gleichungen (12) über in die folgende

$$-\gamma^2 = k\alpha^2 - h\gamma\alpha^2 i$$

aus welcher α durch γ bestimmt werden kann. Es ist

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = -\frac{1}{k - h\gamma i},$$

woraus sich

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \pm \frac{1}{m}\left(\sqrt{\frac{m-k}{2}} - i\sqrt{\frac{m-k}{2}}\right)$$

ergibt, worin m den Modul der complexen Zahl $k - h\gamma i$ bedeutet, also

$$m = \sqrt{k^2 + h^2\gamma^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

ist. Setzt man der Kürze wegen

$$p = \frac{\gamma}{m}\sqrt{\frac{m-k}{2}}, \quad q = \frac{\gamma}{m}\sqrt{\frac{m-k}{2}} \quad . \; . \; . \quad (14)$$

so hat man

$$\alpha = \pm (p - qi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Nimmt man den zweiten der obigen Werthe von B, so erhält man

$$\alpha = \pm (p + qi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Jeder dieser vier Werthe von α kann in (11) eingesetzt werden. Man erhält vier Ausdrücke von X, von denen jeder mit einer andern willkürlichen Constanten versehen werden kann. Ebenso hat man vier Werthe für Y, deren Constanten die mit $+i$ oder $-i$ multiplicirten Constanten der entsprechenden Glieder in X sind, je nachdem das zugehörige α aus (15) oder (16) entnommen ist. Man kann also die allgemeinen Lösungen der Gleichungen (10) so schreiben

$$X = Ae^{(p-qi)x} + A'e^{-(p-qi)x} + A''e^{(p+qi)x} + A'''e^{-(p+qi)x}$$
$$Y = Aie^{(p-qi)x} + A'ie^{-(p-qi)x} - A''ie^{(p+qi)x} - A'''ie^{-(p+qi)x}.$$

Setzt man diese Werthe in (9) ein, so gelangt man nach einigen Umformungen zu folgender Formel

$$\sigma = e^{-px}[(A' + A''')\, i \sin(\gamma t - qx) - (A' - A''')\cos(\gamma t - qx)]$$
$$+ e^{px}\;[(A + A'')\;\; i \sin(\gamma t + qx) - (A - A'')\;\; \cos(\gamma t + qx)],$$

worin den willkürlichen Größen A, A', A'', A''' solche Werthe gegeben werden können, daß alle Glieder reell werden.

Diese Formel für σ stellt vier Züge einfacher Wellen dar, von denen zwei in der Richtung der positiven x, zwei in der Richtung der negativen x fortschreiten. Betrachten wir einen einzelnen Wellenzug ersterer Art, so können wir ihn darstellen durch

$$\sigma = Ae^{-px} \sin(\gamma t - qx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Diese Gleichung lehrt nun zunächst, daß die Amplitude jeder Welle während ihres Fortschreitens abnimmt und zwar in geometrischer Progression, wenn der von der Welle zurückgelegte Weg in arithmetischer wächst. Die Abnahme ist eine um so stärkere, je größer p ist. Es findet also in der Luft eine Absorption des Schalles statt.

Da h eine sehr kleine Größe im Vergleiche zu k ist, so kann man annähernd

$$m = \sqrt{k^2 + h^2\gamma^2} = k\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{h^2\gamma^2}{k^2}\right)$$

setzen und erhält für p dann den genäherten Werth

$$p = \frac{h\gamma^2}{2k\sqrt{k}}.$$

Die Größe γ ist bestimmt durch die Höhe des sich fortpflanzenden Tones. Ist die Anzahl der Schwingungen in einer Secunde $= n$, so ist $\gamma = 2n\pi$. Es wächst also p mit der Höhe des Tones, und zwar im quadratischen Verhältniß.

Nach den Bestimmungen von E. Meyer ist $\mu = 0{\cdot}0003$ Milligramm für das Centimeter als Längen-, die Secunde als Zeiteinheit: Somit ist $\frac{\mu}{\rho} = 0{\cdot}22652$. Setzt man $\lambda = 0$, so wird

$$h = \frac{2\mu}{\rho} = 0{\cdot}45304.$$

Man erhält für die Distanzen von 10, 100, 1000 Metern als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·00000 1·00002 1·00022;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

$$1{\cdot}00022, \qquad 1{\cdot}00222, \qquad 1{\cdot}02244;$$

für einen Ton von 10000 Schwingungen in der Secunde

$$1{\cdot}0224, \qquad 1{\cdot}2485, \qquad 9{\cdot}1991.$$

Für einen Ton von 31623 Schwingungen in der Secunde, der schon nahe der Grenze der noch wahrnehmbaren hohen Töne sich befindet, fällt die Amplitude schon bei 100 Meter Distanz auf $\frac{1}{9}$.

Durch die Formel (17) ist auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles v bestimmt durch

$$v = \frac{\gamma}{q}, \quad v^2 = \frac{\gamma^2}{q^2} = \frac{2m^2}{m+k}$$

und in erster Annäherung

$$v^2 = k + \frac{h^2\gamma^2}{k}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles erscheint also von der Tonhöhe abhängig und zwar in der Art, daß sie mit derselben wächst. Diese Zunahme ist jedoch eine außerordentlich geringe, sie beträgt für einen Ton von 33200 Schwingungen in der Secunde nur etwa 0·001 Millimeter.

Die im Vorhergehenden für Planwellen geführte Rechnung gilt auch für Kugelwellen, sobald man σ durch $r\sigma$ und x durch r ersetzt, unter r den veränderlichen Radius der Kugelwelle verstanden.

Das particuläre Integral (9) der Gleichung (8) diente dazu, die Gesetze des Fortschreitens ebener Schallwellen zu liefern. Zu den Gesetzen, welchen stehende Schwingungen unterworfen sind, führt ein anderes particuläres Integral von der Form

$$\sigma = T \sin \beta x \quad \text{oder} \quad T \cos \beta x,$$

worin T eine Function von t allein ist. Substituirt man die erste dieser zwei Formen in die Gleichung (8), so bleibt zur Bestimmung von T die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2\left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \text{ oder } \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2\left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \text{ oder } \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2 \left(kT + h\,\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2 \left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2 \left(kT + h\,\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa ¼ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die *Amplituden* der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2\left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \text{ oder } \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die *Amplituden* der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2 \left(kT + h \frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \text{ oder } \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2 \left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2\left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

$$1{\cdot}0081, \quad 1{\cdot}0845, \quad 2{\cdot}2511.$$

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2 \left(kT + h\,\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2 \beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2 \beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{3}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2\left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{3}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2\left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2\left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2 \left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

1·0081, 1·0845, 2·2511.

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\beta^2\left(kT + h\frac{\partial T}{\partial t}\right),$$

welcher man durch das particuläre Integral

$$T = e^{-\frac{h\beta^2 t}{2}} \cos \beta t \sqrt{k - \frac{h^2\beta^2}{4}}$$

genügen kann.

Ist λ die Länge einer der stehenden Wellen, so ist in der vorstehenden Formel

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

zu setzen. Diese Formel lehrt nun zunächst, daß stehende Wellen nur möglich sind, wenn ihre Länge einen gewissen Werth, der durch

$$\frac{h^2\beta^2}{4} = k \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{k}}$$

gegeben ist, überschreitet. Man findet nach Einsetzung der obigen Werthe von h und k für diesen Grenzwerth von λ die Zahl 0·00004287 Centimeter. Dem zugehörigen Tone entsprechen 772 Millionen Schwingungen in der Secunde. Diese Zahlen liegen schon nahe denjenigen, welche die neue Gastheorie für die mittlere Länge des Weges, den ein Luftmolecül von einem Zusammenstoße mit einem andern bis zu einem nächsten Zusammenstoße macht, so wie für die mittlere Anzahl von Stößen, welche ein Theilchen in einer Secunde erfährt, liefert. Diese Zahlen sind nämlich nach E. Meyer 0·000014 Centimeter und 3000 Millionen. Es beträgt also die mittlere Weglänge etwa $\frac{1}{4}$ der kleinsten möglichen Wellenlänge.

Ferner lehrt die Formel für T noch, daß die Amplituden der einzelnen Theilchen in einer stehenden Welle in Folge der Reibung allein in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression wächst. Man erhält für die Zeiten 1, 10, 100 Secunden als Divisoren der ursprünglichen Amplituden folgende Zahlen:

Für einen Ton von 100 Schwingungen in der Secunde

1·0001, 1·0018, 1·0081;

für einen Ton von 1000 Schwingungen in der Secunde

$$1{\cdot}0081, \quad 1{\cdot}0845, \quad 2{\cdot}2511.$$

Bei einem Tone von 10000 Schwingungen in der Secunde hat man schon nach einer Secunde für die ursprüngliche Amplitude den Divisor 2·25, und bei einem Tone von 31623 Schwingungen denselben schon nach 0·1 Secunde. Es wird also um so schwieriger einen Ton durch stehende Schwingungen in der Luft zu erhalten und um so stärkere Verdichtungen der Luft sind dazu nothwendig, je höher der Ton ist.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

image
not
available